

На правах рукописи



КУРБАНОВА ДЖУМА РАМАЗАНОВНА

**ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И КРИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПИНОВЫХ
РЕШЕТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ С КОНКУРИРУЮЩИМИ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ**

01.04.07 – физика конденсированного состояния

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МАХАЧКАЛА - 2018

Диссертационная работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт физики им. Х.И. Амирханова Дагестанского научного центра Российской академии наук

Научный руководитель: **Муртазаев Акай Курбанович**
член-корреспондент РАН, доктор
физико-математических наук, профессор, ФГБУН
Институт физики им. Х.И. Амирханова ДНЦ РАН

Научный консультант: **Рамазанов Магомедшейх Курбанович**
кандидат физико-математических наук, ФГБУН
Институт физики им. Х.И. Амирханова ДНЦ РАН

Официальные оппоненты: **Рыжов Валентин Николаевич**
доктор физико-математических наук, ФГБУН
Институт физики высоких давлений
им. Л.Ф. Верещагина РАН
Эмиров Субханверди Нурмагомедович
доктор технических наук, профессор, ФГБУН
Институт проблем геотермии Дагестанского
научного центра Российской академии наук

Ведущая организация: **ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»**

Защита состоится 3 октября 2018 г. в 14³⁰ часов на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.134.02 на базе ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет» Министерства образования и науки РФ и ФГБУН Институт физики им. Х.И. Амирханова Дагестанского научного центра Российской академии наук по адресу: 367003, Махачкала, ул. М. Ярагского, 94, ИФ ДНЦ РАН, актовый зал.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Института физики им. Х.И. Амирханова ДНЦ РАН и на сайте Института по адресу:
http://www.dagphys.ru/upload/files/dissovet/kurbanova_d_r/Dissertation.pdf

Автореферат разослан « ____ » _____ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 999.134.02, д.ф.-м.н.



Алиев А.Р.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В современной физике конденсированного состояния важное место занимают исследования фазовых переходов (ФП) и критических явлений (КЯ) в фрустрированных спиновых системах. Фрустрация, как результат конкурирующих взаимодействий, является источником вырождения и беспорядка, приводящий к появлению новых и интересных физических явлений. На сегодняшний день недостаточно хорошо изучено влияние фрустраций на природу ФП, тепловые, термодинамические, критические и магнитные свойства магнитных материалов. Наличие фрустраций приводит к существенному изменению ряда свойств фундаментального характера. Среди них можно отметить проблемы, связанные с определением характера ФП, с особенностями и факторами, влияющими на формирование классов универсальности магнитного критического поведения фрустрированных спиновых систем и др. Решение этих вопросов требует тщательного исследования спиновых систем с фрустрациями. Кроме того, учет взаимодействия вторых ближайших соседей в таких системах может приводить к смене рода ФП. Особенности ФП при разных значениях соотношения обменных взаимодействий между первыми J_1 и вторыми ближайшими соседями J_2 известны лишь в общих чертах. Следовательно, актуальность исследования сложных спиновых решеточных моделей с конкурирующими взаимодействиями не вызывает сомнения.

На данный момент существует множество хорошо зарекомендовавших себя методов моделирования магнитных систем. Проблема нахождения минимально возможной энергии фрустрированных систем, вызванная существованием энергетических барьеров, грубостью или шероховатостью энергетического ландшафта, ее вырождение и некоторые другие причины привели к тому, что ФП и КЯ интенсивно исследуются методами вычислительной физики – методами Монте-Карло (МК) и молекулярной динамики [1-3], которые позволяют успешно исследовать критические свойства систем со сложными реалистичными гамильтонианами в широком диапазоне температур и других внешних параметров. Это говорит о том, что ФП и КЯ в материалах с фрустрациями в настоящее время целесообразно изучать методами МК на основе специально разработанных алгоритмов, так как обычные методы МК плохо справляются с решением этой проблемы. Поэтому в последнее время разработано много новых вариантов алгоритмов метода МК. Для решения этой проблемы наиболее мощными и эффективными оказались репличные алгоритмы [4] и алгоритмы Ванга-Ландау метода МК [5].

Таким образом, исследование особенностей ФП и КЯ, в частности фрустрированных спиновых систем, исходя из трехмерных микроскопических гамильтонианов, является **важной и актуальной** проблемой современной статистической физики решеточных систем.

Целью работы является исследование особенностей ФП и статических критических свойств моделей фрустрированных спиновых систем современными алгоритмами (репличным алгоритмом и алгоритмом Ванга-

Ландау) метода МК. В процессе выполнения работы решались следующие **основные задачи**:

1. разработка комплекса программ для ЭВМ, с помощью которого можно исследовать характер ФП и статические критические свойства моделей с фрустрациями;
2. исследование методом МК ФП и статических критических свойств фрустрированной антиферромагнитной модели Изинга на квадратной решетке с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей. Определение статических критических индексов теплоемкости α , намагниченности β , восприимчивости χ , радиуса корреляции ν и индекса Фишера η этой модели на основе теории конечно-размерного скейлинга (КРС);
3. изучение ФП, статических критических свойств и особенностей влияния конкурирующих обменных взаимодействий на поведение $3d$ модели Изинга на объемно-центрированной кубической (ОЦК) решетке с взаимодействиями первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей;
4. исследование ФП и статических критических свойств и особенностей влияния конкурирующих обменных взаимодействий на поведение $3d$ антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решетке с взаимодействиями первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей;
5. определение классов универсальности критического поведения:
 - $2d$ антиферромагнитной модели Изинга на квадратной решетке с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей;
 - $3d$ антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей;
 - $3d$ антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решетке с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей.

Практическая ценность работы

Полученные в диссертации результаты по исследованию статических критических свойств фрустрированных спиновых моделей представляют интерес для дальнейших исследований в теории магнетизма, физики фазовых переходов и статистической физики конденсированного состояния. Разработанный комплекс программ для ЭВМ формирует базу, на основе которой возможны исследования статических критических явлений в фрустрированных спиновых системах.

Использование репличного алгоритма и алгоритма Ванга-Ландау метода МК для исследования моделей фрустрированных спиновых систем позволяет определять с высокой степенью надежности критические параметры системы и являются значительно более эффективными по сравнению с классическим алгоритмом (алгоритм Метрополиса). Данные алгоритмы успешно справляются с проблемой локальных энергетических минимумов, для решения которой другие алгоритмы метода МК оказались малоэффективными.

Результаты численного эксперимента, полученные в данной работе, используются для чтения спецкурсов: «Исследование фазовых переходов и

критических явлений методами Монте-Карло», «Компьютерное моделирование в физике», «Методы вычислительной физики в магнетизме», а часть программ для ЭВМ при выполнении лабораторных работ по указанным спецкурсам в Дагестанском государственном университете.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Фазовая диаграмма двумерной модели Изинга на квадратной решетке с взаимодействиями первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей. Доказательство возникновения частично фрустрированного состояния при $k=J_2/J_1=0.5$. Расчет критических параметров и определение класса универсальности критического поведения в диапазоне $k \leq 0.5$. Расчет критических параметров (α , β , γ , ν , η) и демонстрация отсутствия универсальности критического поведения при $0.67 \leq k \leq 1.0$.
2. Фазовая диаграмма модели Изинга на ОЦК решетке с взаимодействиями первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей. Расчет критических параметров, определение класса универсальности критического поведения в интервале $0 \leq k < 2/3$. Определение критических параметров и доказательство отсутствия универсальности критического поведения в диапазоне $0.75 < k \leq 1.0$.
3. Фазовая диаграмма модели Гейзенберга на ОЦК решетке с взаимодействиями первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей. Расчет критических параметров и определение класса универсальности критического поведения в интервале $0 \leq k \leq 2/3$.
4. Доказательство отсутствия полностью фрустрированного состояния в моделях Изинга и Гейзенберга на ОЦК решетке с взаимодействиями первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей.
5. Разработка сложного комплекса программ для ЭВМ, основанного на использовании современных высокоэффективных алгоритмов, позволяющих проводить высокоточные исследования статических критических явлений в моделях фрустрированных спиновых систем.

Научную новизну и значимость полученных в диссертации результатов определяют основные положения, которые выносятся на защиту.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях, совещаниях, семинарах: 16-м международном симпозиуме «Упорядочение в металлах и сплавах» ОМА-16 (Ростов-на-Дону, пос. Лоо, 2013); V Euro-Asian Symposium "Trends in MAGnetism": Nanomagnetism EASTMAG-2013 (Krasnoyarsk, 2013); Moscow International Symposium on Magnetism «MISM» (Moscow, 2014); 17-м международном симпозиуме «Упорядочение в минералах и сплавах» ОМА-17 (Ростов-на-Дону, пос. Южный, 2014); Международный междисциплинарный симпозиум «Физика поверхностных явлений, межфазных границ и фазовые переходы» (Нальчик, Ростов-на-Дону, Грозный, пос. Южный, 2014); VIII Всероссийская конференция «ФЭ – 2014» (Махачкала, 2014); II

Всероссийская научная молодежная конференция «Актуальные проблемы нано- и микроэлектроники» (Уфа, 2014); Международный междисциплинарный симпозиум «Физика поверхностных явлений, межфазных границ и фазовые переходы» PSP&PT - 5 (Нальчик, Ростов-на-Дону, Грозный, пос. Южный, 2015); XI Международный семинар «Магнитные фазовые переходы», посвященный 80-летию член-корреспондента РАН Камилова И.К. (Махачкала, 2015); Международная конференция, посвященная 80-летию члена-корреспондента РАН И.К. Камилова «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах» (Махачкала, 2015); II Всероссийская конференция «Современные проблемы физики плазмы и физической электроники» (Махачкала, 2015); Международный междисциплинарный симпозиум «Физика поверхностных явлений, межфазных границ и фазовые переходы» (Нальчик, Ростов-на-Дону, Грозный, пос. Южный, 2016); IX Научно-практический семинар «Актуальные проблемы физики конденсированных сред» (Севастополь, 2016); VI Euro-Asian Symposium “Trends in MAGnetism” EASTMAG-2016 (Krasnoyarsk, 2016); Международная конференция «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах» (Махачкала, 2017); Moscow International Symposium on Magnetism «MISM» (Moscow, 2017).

Достоверность результатов обеспечивается строгой математической обоснованностью использованных численных методов, применением надежной теоретической базы для интерпретации полученных данных и сравнением с имеющимися в литературе данными других авторов. Результаты, приведенные в диссертации, проверены с помощью независимых методов: репличным обменным алгоритмом и алгоритмом Ванга-Ландау метода МК. Полученные данные хорошо согласуются между собой.

Личный вклад автора

Все основные результаты получены автором лично или при его активном участии. Постановка численных экспериментов и обработка результатов выполнены лично автором диссертации. Обсуждение результатов и подготовка публикаций проведены совместно с соавторами.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 34 работы: 2 статьи в рецензируемых журналах, 9 статей в журналах, входящих в перечень ВАК РФ, из которых 3 работы индексируются международными системами цитирования Web of Science и Scopus, 23 в сборниках конференций и 1 свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из введения, трех глав, выводов и списка цитируемой литературы. Диссертационная работа изложена на 149 страницах, иллюстрирована 76 рисунками, 5 таблицами. Список литературы включает 201 источник.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи диссертационной работы, приводятся основные положения, выносимые на защиту, дается краткая аннотация по главам.

В главе I изложен классический метод Монте-Карло применительно к каноническому ансамблю. Описаны современные алгоритмы метода МК (репличный алгоритм и алгоритм Ванга-Ландау) и выполнен обзор моделей магнитных систем.

В главе II приведен обзор современного состояния теоретических и экспериментальных исследований статических критических свойств фрустрированных спиновых систем и результаты, полученные автором при исследовании двухмерной антиферромагнитной модели Изинга с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей.

Представлены результаты исследования критических явлений фрустрированной антиферромагнитной модели Изинга на квадратной решетке с учетом взаимодействий первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей.

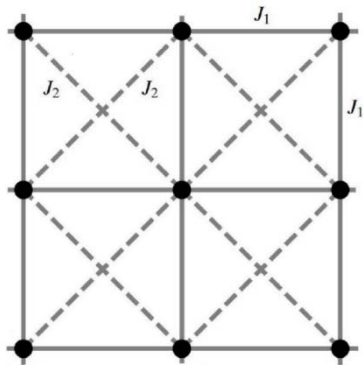


Рис. 1. Схематическое представление модели Изинга на квадратной решетке с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей.

Гамильтониан этой модели может быть представлен в следующем виде:

$$H = -J_1 \sum_{\langle ij \rangle} (S_i \cdot S_j) - J_2 \sum_{\langle il \rangle} (S_i \cdot S_l), \quad (1)$$

где $S_i = \pm 1$ – изинговский спин, $J_1 < 0$ и $J_2 < 0$ – константы обменного взаимодействия. $k = J_2/J_1$ – величина взаимодействия спина S_i со вторыми ближайшими соседями в интервале значений $0.0 \leq k \leq 1.0$ с шагом $\Delta k = 0.1$. Первый член в формуле (1) учитывает обменное взаимодействие ближайших соседей J_1 , а второй

– вторых ближайших соседей J_2 . Фрустрации в этой модели обусловлены конкуренцией обменных взаимодействий между первыми и вторыми ближайшими соседями.

Для исследования данной модели нами использован репличный обменный алгоритм [4] и алгоритм Ванга-Ландау метода Монте-Карло [5]. Расчеты проводились для систем с периодическими граничными условиями и с линейными размерами $L \times L = N$, $L = 20 \div 150$.

Для наблюдения за температурным ходом поведения теплоемкости и восприимчивости нами использовались выражения [6]:

$$C = (NK^2) \left(\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2 \right), \quad (2)$$

$$\chi = \begin{cases} (NK) \left(\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 \right), & T < T_N \\ (NK) \langle m^2 \rangle, & T \geq T_N \end{cases}, \quad (3)$$

где $K = |J|/k_B T$, N – число частиц, U – внутренняя энергия, m – подрешеточная намагниченность, T – температура (далее температура дана в единицах $|J_1|/k_B$).

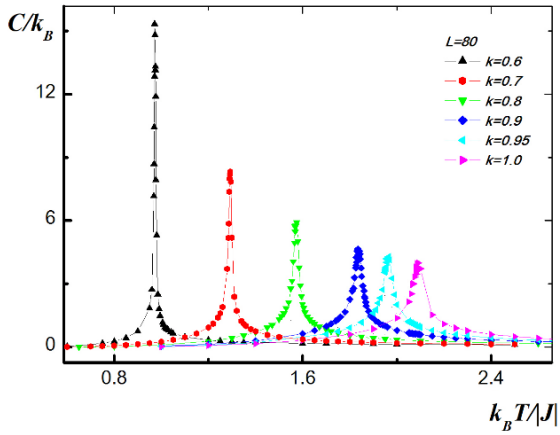


Рис. 2. Зависимость теплоемкости C/k_B от температуры $k_B T/J$ для системы с $L = 80$ для разных k .

На рисунке 2 представлены характерные зависимости теплоемкости C от температуры для систем с линейными размерами $L=80$ для разных k . Отметим, что в зависимости теплоемкости C от температуры для всех k вблизи критической температуры наблюдаются хорошо выраженные максимумы. При этом увеличение значения k ведет к росту температуры ФП и соответственно смещению максимумов в сторону более высоких температур. Физическую картину происходящего можно объяснить тем, что увеличение взаимодействия вторых

ближайших соседей усиливает вклад энергии взаимодействия по модулю, система становится более жесткой, что соответственно повышает температуру ФП.

Для определения критической температуры T_N был использован метод кумулянтов Биндера четвертого порядка [7, 8]:

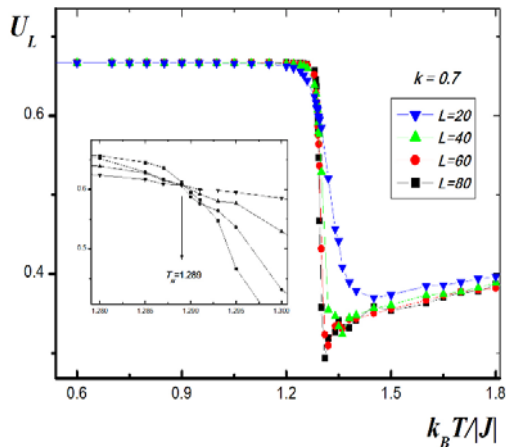


Рис. 3. Зависимость Кумулянта Биндера U_L от температуры $k_B T/J$ для $k = 0.7$.

$$U_L = 1 - \frac{\langle m^4 \rangle_L}{3 \langle m^2 \rangle_L^2}. \quad (4)$$

Согласно теории КРС точка пересечения всех кривых U_L в их температурной зависимости является критической точкой. Кроме того, данный метод позволяет хорошо тестировать тип ФП в системе. Известно, что в случае ФП второго рода кривые температурной зависимости кумулянтов Биндера U_L имеют четко выраженную точку пересечения. На рисунке 3 представлены характерные зависимости U_L от

температуры $k_B T/J$ для $k=0.7$. На вставке видно, что в критической области наблюдается хорошо выраженная точка пересечения ($T_N=1.289(1)$), что свидетельствует о ФП второго рода. Построив аналогичные зависимости, были определены значения критических температур для всех остальных значений k .

Согласно теоретическим данным при $k=0.5$ взаимодействия первых и вторых ближайших соседей одинаковые, и в системе возникает фрустрация. Это нарушает порядок в системе и приводит к исчезновению ФП.

Чтобы проверить возникновение фрустрации, мы анализировали температурную зависимость энтропии системы S . Известно, что энтропия в фрустрированной модели Изинга должна принимать ненулевые значения при низких температурах и стремится к $\ln 2$ при более высоких температурах. Эти особенности показаны на рисунке 4.

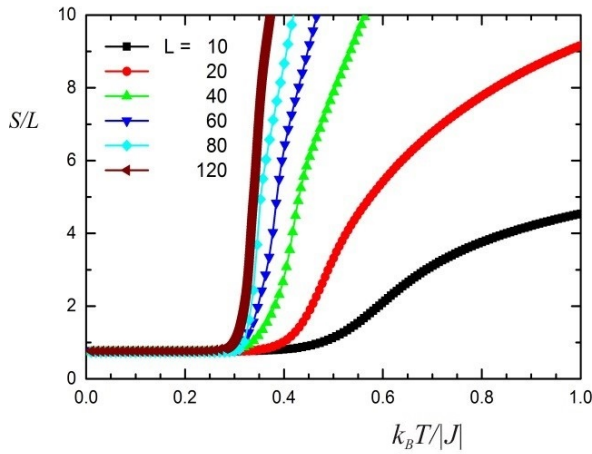


Рис. 4. Температурная зависимость энтропии S/L для систем с разными линейными размерами L при $k = 0.5$.

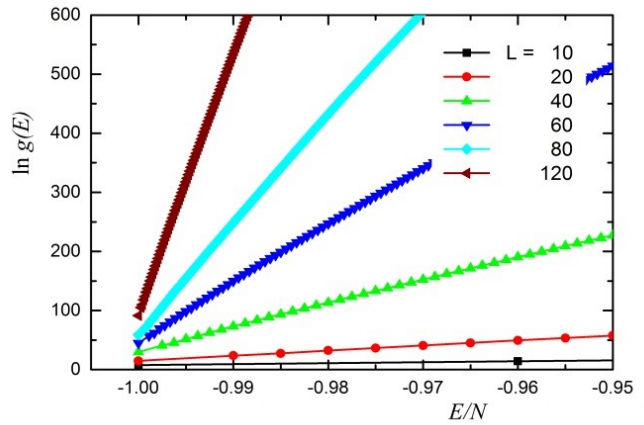


Рис. 5. Плотность состояний $g(E)$ для систем с разными линейными размерами L при $k = 0.5$.

Как видно из рисунка 4, энтропия S/L при $T \rightarrow 0$ (T – приведенная температура) не меняется с линейными размерами системы и стремится к ненулевому значению. Такое поведение энтропии объясняется тем, что логарифм плотности состояний $\ln g(E)$ возрастает пропорционально L в основном состоянии ($E/N = -1$) с увеличением линейных размеров системы (рис. 5). Это связано с тем, что фрустрации в системе приводят к вырождению основного состояния, но степень вырождения меньше, чем для моделей с ненулевой энтропией основного состояния. Об этом мы также можем судить по рисунку 6,

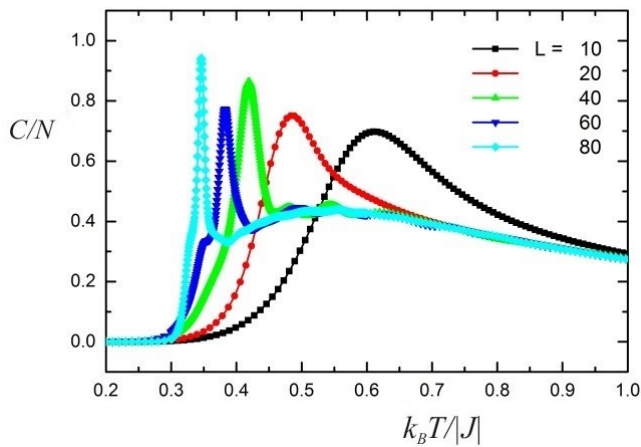


Рис. 6. Зависимость теплоемкости C/N от температуры для разных линейных размеров L при $k = 0.5$.

где представлена зависимость теплоемкости от температуры, полученная при $k=0.5$ для разных значений L . Увеличение линейных размеров решетки вызывает расщепление теплоемкости. На диаграммах теплоемкости есть два пика (гладкий и острый) при $L \geq 40$. При увеличении L острый пик перемещается в сторону более низких температур. Этот пик сужается с ростом L и падает на довольно узкий температурный интервал.

На рисунке 7 приведена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия вторых ближайших соседей. На диаграмме мы видим, что в точке $k=0.5$ пересекаются три различные фазы: I – антиферромагнитная, II – парамагнитная и III – суперантиферромагнитная. Согласно нашим данным, на диаграмме $T_{C_{\max}}$ при $L \rightarrow \infty$ стремится к конечной величине $T_{C_{\max}}(L=\infty) \approx 0.23(5)$ для $k=0.5$. Результаты наших исследований показывают, что в областях $k < 0.5$ и $k \geq 0.67$ наблюдается переход второго рода, а в интервале значений $0.5 < k < 0.67$ – ФП первого рода. Этот факт подтверждается и гистограммным анализом данных. На рисунке 8 представлена гистограмма распределения энергии для случая $k=0.51$ в

критической точке ($T_N=0.514(2)$) для системы с $L=150$. Этот рисунок демонстрирует бимодальное распределение энергии, типичное для ФП первого порядка. Аналогичные гистограммы были построены и для остальных значений k . Такое поведение проявляется в диапазоне $0.5 < k < 0.67$.

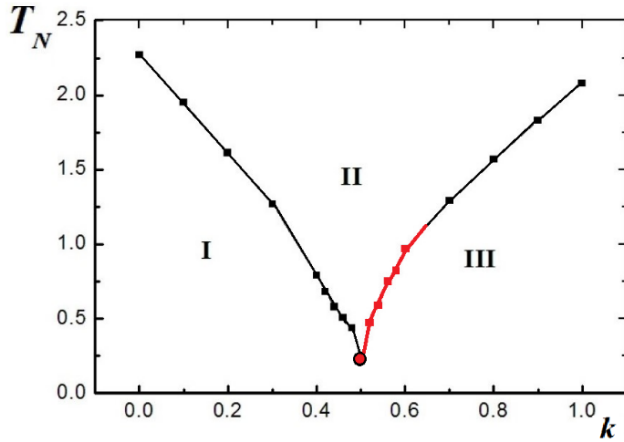


Рис. 7. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия следующих ближайших соседей

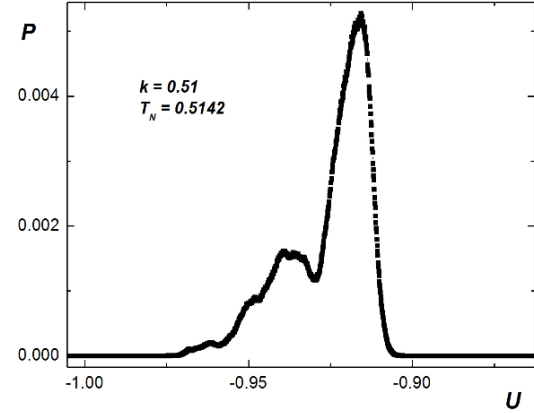


Рис. 8. Гистограмма распределения энергии для случая $k=0.51$ при $L=150$.

Для расчета статических критических индексов теплоемкости α , восприимчивости γ , намагниченности β и радиуса корреляции ν использовались следующие выражения [1, 9]:

$$C_{\max}(L) = A_1 - A_2 L^{\alpha/\nu}, \quad (5)$$

$$m \approx L^{-\beta/\nu}, \quad (6)$$

$$\chi \approx L^{\gamma/\nu}, \quad (7)$$

$$V_n = L^{1/\nu} g_{V_n} \quad (8)$$

где $g_{V_n} = \text{const}$, а в качестве V_n может выступать

$$V_n = \frac{\langle m^n E \rangle}{\langle m^n \rangle} - \langle E \rangle, \quad (n=1,2,3). \quad (9)$$

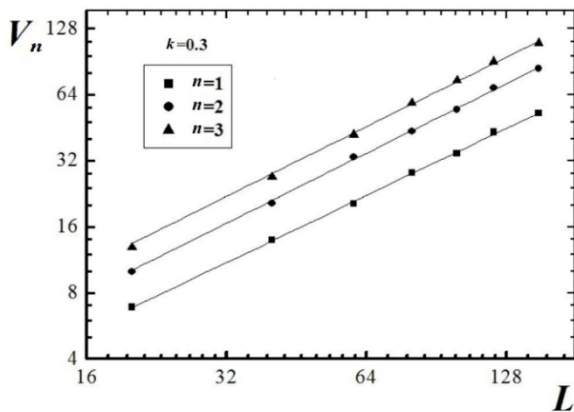


Рис. 9. Зависимость параметров V_n от линейных размеров системы при $T=T_N$ для $k=0.3$.

На рисунке 9 в двойном логарифмическом масштабе представлены характерные зависимости параметров V_n при $n=1, 2, 3$ от линейных размеров решетки L для $k=0.3$. Как видно из рисунка, все точки на графиках в пределах погрешности хорошо ложатся на прямые.

Зависимости на рисунке, построенные в соответствии с методом наименьших квадратов, параллельны друг другу. Угол наклона прямой определяет значения $1/\nu$. Вычисленное таким образом значение ν использовалось для

определения критических индексов теплоемкости α , восприимчивости γ и параметра порядка β . По этой схеме нами определены значения ν для всех k . Эти данные представлены в таблице 1.

Как видно из таблицы критическая температура $k_B T_N/|J_1|$ уменьшается с увеличением величины взаимодействия вторых соседей вплоть до значения $k=0.4$. При дальнейшем увеличении k критическая температура начинает расти. Численные значения критических индексов, приведенные в таблице 1, свидетельствуют, что в интервале $0.0 \leq k \leq 0.4$ все индексы совпадают с данными Онзагера и не зависят от величины k . В этом интервале наблюдается универсальное критическое поведение. В интервале $0.7 \leq k \leq 1.0$ все критические индексы меняются с изменением k . Значения критических индексов в этом интервале изменения k не совпадают с соответствующими значениями из интервала $0.0 \leq k \leq 0.4$ и не совпадают с данными, полученными для точно решенной модели.

Таблица 1. Значения критических параметров для двухмерной фрустрированной модели Изинга на квадратной решетке с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей.

k	$k_B T_N/ J_1 $	ν	α	β	γ	η	$\alpha+2\beta+\gamma=2$
0.0	2.268	1	0.01	0.13	1.75	0.25	2.02
0.1	1.952	1.01	0.01	0.12	1.76	0.26	2.01
0.2	1.612	0.99	0.01	0.11	1.76	0.23	1.99
0.3	1.258	0.99	0.01	0.12	1.76	0.23	2.01
0.4	0.873	1.01	0.01	0.11	1.75	0.25	1.98
0.7	1.289	0.74	0.51	0.10	1.28	0.26	1.99
0.8	1.567	0.78	0.46	0.10	1.37	0.24	2.03
0.9	1.828	0.80	0.41	0.09	1.43	0.22	2.02
0.95	1.955	0.82	0.36	0.09	1.44	0.24	1.98
1.0	2.081(1)	0.830(1)	0.358(1)	0.093(1)	1.451(1)	0.224(1)	1.98
Onsager	2.262	1	0	0.125	1.75	-	2

Из таблицы 1 видно, что в исследуемой модели существуют две области, которые характеризуются различным набором критических индексов. Класс универсальности критического поведения модели Изинга с антиферромагнитными взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей сохраняется в пределах значения $0.0 \leq k \leq 0.4$. Можно утверждать, что изменение величины взаимодействия вторых ближайших соседей приводит к неуниверсальному критическому поведению в интервале $0.7 \leq k \leq 1.0$.

В главе III на основе репличного алгоритма и алгоритма Ванга-Ландау метода Монте-Карло исследуются ФП и статическое критическое поведение $3d$ антиферромагнитной модели Изинга и Гейзенберга на ОЦК решетке с взаимодействиями первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей.

Приведены результаты исследований $3d$ антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке с учетом взаимодействия первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей.

Учет антиферромагнитных взаимодействий вторых ближайших соседей в классической трехмерной модели Изинга приводит к вырождению основного состояния. Гамильтониан этой системы представлен выражением:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i \cdot S_j) - J_2 \sum_{\langle i,l \rangle} (S_i \cdot S_l), \quad (10)$$

где $S_{i,j} = \pm 1$ – изинговский спин. Первый член в формуле (10) учитывает обменное взаимодействие первых ближайших соседей ($J_1 < 0$), а второй – вторых ближайших соседей ($J_2 < 0$); $k = J_2/J_1$ – величина взаимодействия вторых ближайших соседей в интервале значений $0.0 \leq k \leq 1.0$ с шагом $\Delta k = 0.1$. Расчеты

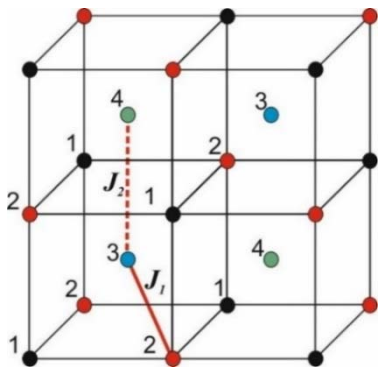


Рис. 10. ОЦК-решетка.
Цифрами обозначены 4 подрешетки.

выполнены для систем с периодическими граничными условиями и линейными размерами $2(L \times L \times L) = N$, $L = 12 \div 90$. Схематически эта модель представлена на рисунке 10. Каждый атом имеет 8 ближайших и 6 вторых ближайших соседей. Решетка разделена на четыре взаимопроникающие подрешетки. Каждая из этих подрешеток имеет гранецентрированную кубическую структуру, как показано на рисунке 10.

Для наблюдения за температурным ходом поведения теплоемкости и восприимчивости нами использовались выражения (2) и (3). Параметр порядка системы m вычислялся по формуле:

$$m = 3m_1 - m_2 - m_3 - m_4, \quad (11)$$

где m – параметр порядка, m_1, m_2, m_3, m_4 – параметр порядка по подрешеткам.

Для определения критической температуры T_N , нами был использован метод кумулянтов Биндера U_L четвертого порядка. На рисунке 11 приведена

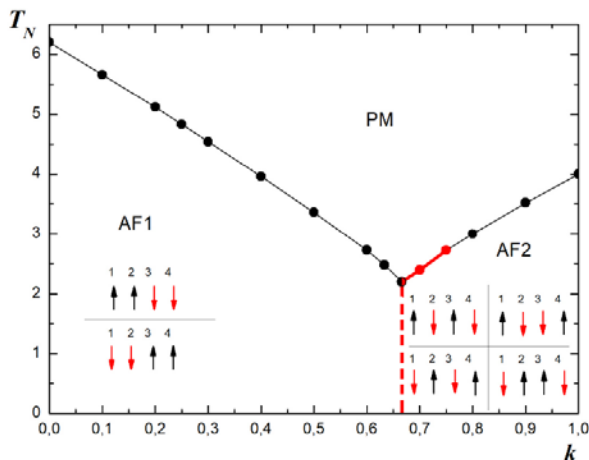


Рис. 11. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия вторых ближайших соседей.

фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от величины взаимодействия вторых ближайших соседей k . На диаграмме мы видим, что вблизи точки $k=2/3$ пересекаются три различные фазы: AF1 – антиферромагнитная 1-го типа, PM – парамагнитная и AF2 – антиферромагнитная 2-го типа. На фазовой диаграмме черными и красными стрелками изображены направления спинов во всех подрешетках. На этом рисунке видно, что по мере приближения к значению

$k=2/3$ критическая температура T_N уменьшается. Можно предположить, что для

рассмотренной нами модели при $k=2/3$ система будет иметь минимальную температуру ФП. Согласно результатам данной работы, в интервалах значений $0.0 \leq k \leq 0.66$ и $0.75 < k \leq 1.0$ наблюдаются ФП второго рода, а в интервале $0.66 < k \leq 0.75$ в системе реализуется ФП первого рода.

Для большей достоверности результатов, полученных репличным алгоритмом метода МК, мы более подробно исследовали особенности, наблюдающиеся для этой модели вблизи точки пересечения трех различных фаз, алгоритмом Ванга-Ландау метода МК.

На рисунке 12 приведены магнитные структуры основного состояния для исследуемой модели, полученные с помощью алгоритма Ванга-Ландау. Преимуществом этого алгоритма является то, что он позволяет на основе анализа плотности состояний и энергетических состояний в области основного состояния определить и графически отобразить структуру основного состояния. На этом рисунке цифрами 1 – 6 показаны все возможные магнитные структуры основного состояния, наблюдаемые в данной модели. Как видно на диаграмме (рис. 11), в фазе AF1 могут реализоваться только две структуры основного состояния (1 и 2 на рис. 12). В фазе AF2 реализуются четыре структуры основного состояния (3 – 6 на рис. 12). Вдоль вертикальной пунктирной линии, соответствующей значению $k=2/3$ сосуществуют все шесть структур одновременно (1 – 6 на рис. 12).

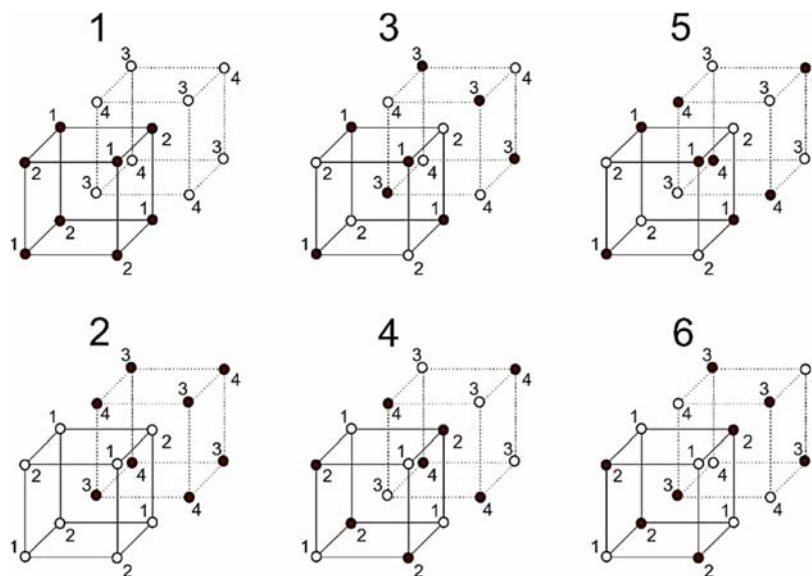


Рис. 12. Магнитные структуры основного состояния модели Изинга на ОЦК решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей.

Плотности состояний $g(E)$ для систем с различными линейными размерами L представлены на рисунках 13 и 14. На рисунке 14 (увеличенная вставка из графика 13) видно, что в данной системе вырождение основного состояния стремится к $\ln 6$. Это говорит о том, что в исследуемой модели конкуренция обменного взаимодействия вторых ближайших соседей не приводит к возникновению фрустрации, в отличие от модели Изинга на квадратной решетке, но в системе наблюдается вырождение основного состояния кратное 6 соответствующим магнитным структурам на рисунке 12.

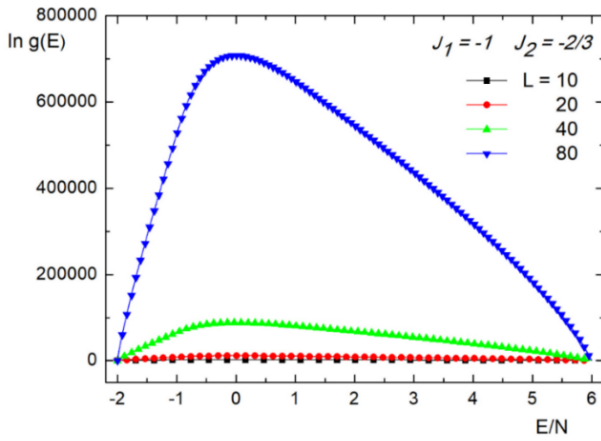


Рис. 13. Плотность состояний $g(E)$ для систем с разными линейными размерами L .

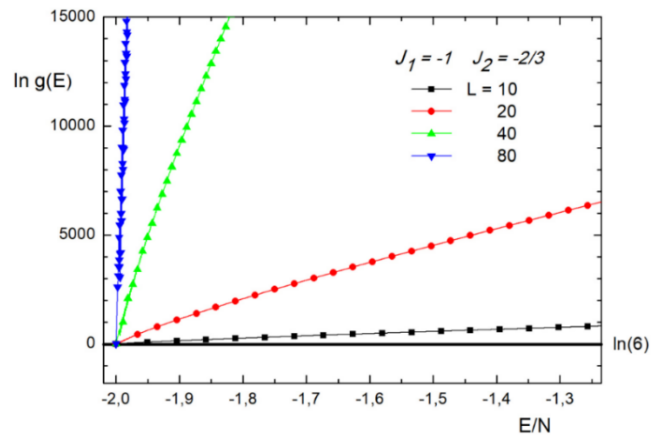


Рис. 14. Плотность состояний $g(E)$ для систем с разными линейными размерами L .

Более подробное исследование интервала $2/3 \leq k \leq 0.75$ показало, что для случая $k=2/3$ наблюдается ФП второго рода. Гистограммы, полученные с помощью алгоритма Ванга-Ландау, в интервалах $0.0 \leq k \leq 0.6$ и $0.8 \leq k \leq 1.0$ полностью согласуются с гистограммами, полученными на основе репличного обменного алгоритма. На рисунке 15 представлены гистограммы распределения энергии для $k=2/3$ с линейными размерами $L=80$. Графики построены при критической температуре ($T_N=2.200$) и вблизи T_N . На рисунках видно, что зависимости вероятности $W(E/N)$ от энергии E/N для всех значений температур демонстрируют один хорошо выраженный максимум, который свидетельствует в пользу ФП второго рода.

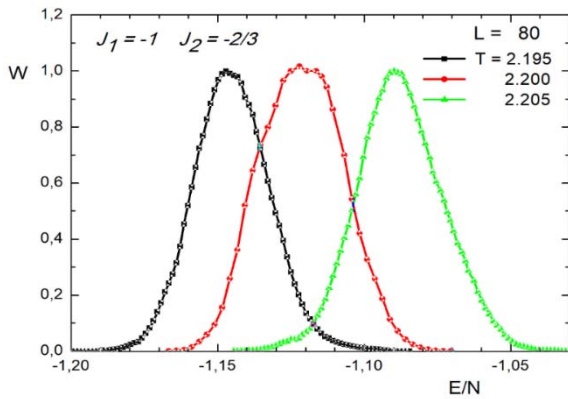


Рис. 15. Гистограмма распределения энергии для $k=0.66$ при $L=80$.

На рисунке 16 представлены гистограммы распределения энергии для случая $k=0.7$ с линейными размерами системы $L=80$. Как видно из рисунка, при критической температуре ($T_N=2.386(5)$) наблюдается бимодальное распределение энергии, характерное для ФП первого рода. Такое же поведение наблюдается и для значения $k=0.75$. Таким образом, результаты данного исследования показывают, что на фазовой диаграмме (рис. 11) наблюдается узкая область

$2/3 < k \leq 0.75$, в которой переход реализуется как ФП первого рода.

Это подтверждается данными, показанными на рисунке 17, где приведена временная динамика изменения внутренней энергии в ходе компьютерного моделирования для системы с линейными размерами $L=80$ для случая $k=0.7$. По оси ординат отложено количество Монте-Карло шагов на спин (NMCS). Результаты приведены для трех температур: в точке ФП ($T=2.386(5)$), а также выше и ниже критической температуры ($T=2.3$ и $T=2.6$ соответственно). Как видно из графика, в точке ФП имеются два метастабильных энергетических уровня $E_1=-1.235(65)$ и $E_2=-0.998(60)$. Система совершает случайные флуктуации около этих двух энергетических состояний. Энергия E_1 соответствует первому

максимуму вероятности $W(E/N)$, а E_2 – второму максимуму на рисунке 16. Такое поведение характерно для ФП первого рода.

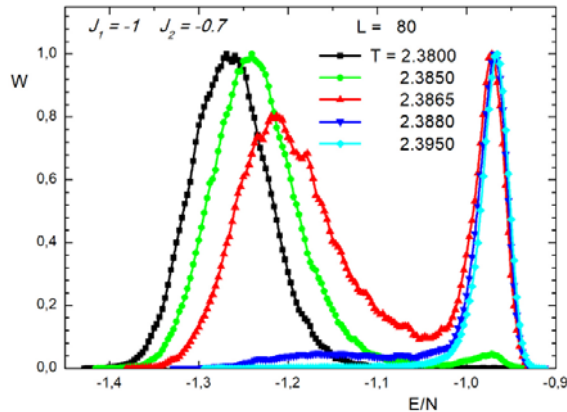


Рис. 16. Гистограмма распределения энергии для $k=0.7$ при $L=80$.

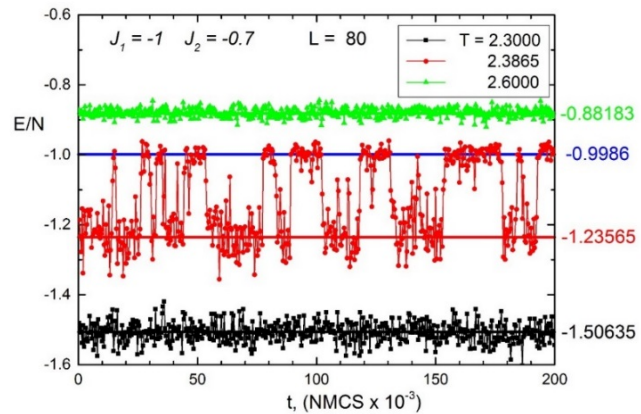


Рис. 17. Временная динамика внутренней энергии при различных температурах для $k=2/3$ при $L=80$.

Анализируя наши данные, можно сказать, что впервые получены все возможные магнитные структуры основного состояния, соответствующие различным областям фазовой диаграммы. Показано, что в зависимости от величины k в системе возможно 6 различных упорядочений в основном состоянии. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия следующих ближайших соседей. Впервые на диаграмме обнаружена узкая область ($2/3 < k \leq 0.75$), где переход из антиферромагнитной фазы в парамагнитную является переходом первого рода. Показано, что при значении $k=2/3$ наблюдается ФП второго рода, и конкуренция обменных взаимодействий не приводит к возникновению полностью фрустрированного состояния.

Для расчета статических критических индексов теплоемкости α , восприимчивости χ , параметра порядка β , радиуса корреляции ν и индекса Фишера η применялись соотношения теории КРС (5 - 9).

Как видно из таблицы 2, почти все значения критических индексов в интервале $0.0 \leq k \leq 0.6$ в пределах погрешности совпадают между собой. Это свидетельствует о том, что в этом интервале система проявляет универсальное критическое поведение. В интервале $0.8 \leq k \leq 1.0$ значения критических индексов отличаются от соответствующих значений из интервала $0.0 \leq k \leq 0.6$. Можно предположить, что при увеличении величины взаимодействия следующих ближайших соседей в системе происходит смена класса универсальности критического поведения. Кроме того, в интервале $0.8 \leq k \leq 1.0$ индексы меняются с изменением k . Это позволяет нам говорить о том, что в этом интервале наблюдается неуниверсальное критическое поведение. Неуниверсальность критического поведения связана с усилением конкуренции обменных взаимодействий между ближайшими и следующими соседями при $k > 2/3$. Это следует из решения Бэкстера для точно решаемой восьмивершинной модели.

Таблица 2.

Значения критических индексов для $3d$ антиферромагнитной модели Изинга с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей на объемно-центрированной кубической решетке.

k	α	β	γ	ν	η	$\alpha+2\beta+\gamma=2$
0.0	0.13(2)	0.31(1)	1.23(1)	0.63(1)	0.04(2)	1.98
0.1	0.13	0.30	1.24	0.62	0.03	1.97
0.2	0.13	0.31	1.23	0.62	0.02	1.98
0.3	0.12	0.31	1.25	0.64	0.04	1.99
0.4	0.13	0.31	1.22	0.63	0.05	1.97
0.5	0.12	0.31	1.24	0.62	0.03	1.98
0.6	0.13	0.31	1.22	0.62	0.03	1.97
0.8	0.63	0.20	1.0	0.48	-0.07	2.03
0.9	0.47	0.22	1.12	0.54	-0.05	2.03
1.0	0.40	0.25	1.14	0.58	-0.01	2.04
Нефрустри- рованная модель Изинга	0.108(9)	0.3265(25)	1.239(4)	0.6305(25)	0.037(3)	1.999

Отметим, что полученные нами значения критических индексов в интервале $0.0 \leq k \leq 0.6$, в пределах погрешности совпадают с соответствующими значениями критических индексов для нефрустрированной трехмерной модели Изинга. Это подтверждает принадлежность исследованной нами модели в этом интервале к тому же классу универсальности критического поведения, что и трехмерная модель Изинга на кубической решетке. Сравнение наших результатов, полученных для интервала $0.0 \leq k \leq 0.6$, показывает, что они находятся в хорошем согласии, как с теоретическими данными, так и с данными других авторов, полученными методом МК. Некоторые критические параметры для данной модели при различных значениях k рассчитаны нами впервые.

Рассмотрены также результаты исследования $3d$ антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решетке с взаимодействиями первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей. Гамильтониан этой модели может быть представлен в следующем виде:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) - J_2 \sum_{\langle i,l \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_l), \quad (12)$$

где $|\vec{S}_i|$ – трехкомпонентный единичный вектор $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$. Первый член в формуле (12) учитывает обменное взаимодействие ближайших соседей ($J_1 < 0$), а второй – вторых ближайших соседей ($J_2 < 0$). В данной работе рассматривается случай, когда $k = J_2/J_1$ меняется в интервале значений $0.0 \leq k \leq 1.0$ с шагом $\Delta k = 0.1$; k – величина взаимодействия вторых ближайших соседей. Схематически эта модель представлена на рисунке 10.

Для наблюдения за температурным ходом теплоемкости и восприимчивости использовались флуктуационные соотношения (2) и (3). Параметр порядка определялся по формуле:

$$\vec{m} = 3\vec{m}_1 - \vec{m}_2 - \vec{m}_3 - \vec{m}_4, \quad (13)$$

где m – параметр порядка, $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3, \vec{m}_4$ – параметры порядка по подрешеткам.

Температуры ФП для всех k были найдены с использованием высокоточного метода кумулянтов Биндера U_L четвертого порядка (4).

На рисунке 18 приведена фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от величины взаимодействия вторых ближайших соседей k , полученная нами. На этой диаграмме мы видим, что вблизи точки $k=2/3$ пересекаются три различные фазы: AF1 – антиферромагнитная фаза 1-го типа, PM – парамагнитная фаза и AF2 – антиферромагнитная фаза 2-го типа. Переход

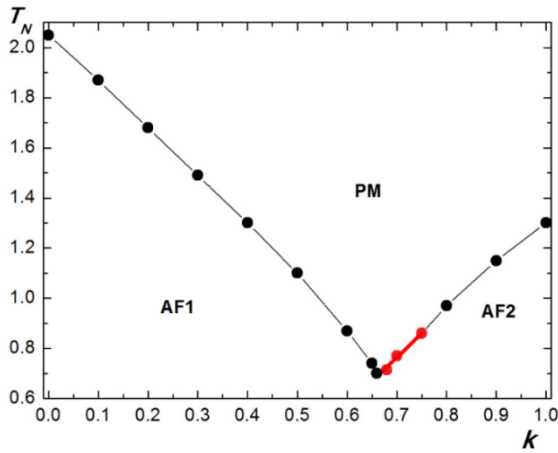


Рис. 18. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия вторых ближайших соседей.

от AF1 упорядочения к AF2 в данной модели обусловлен изменением структуры основного состояния. По мере приближения к точке, где сосуществуют три фазы, температура ФП смещается в сторону более низких температур. Диаграмма, полученная для этой модели, качественно совпадает с диаграммой $3d$ модели Изинга на ОЦК решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей. Результаты данной работы показывают, что в интервалах $0.0 \leq k \leq 0.6$ и $0.8 \leq k \leq 1.0$ наблюдается ФП второго рода. Более

подробное исследование интервала $2/3 \leq k \leq 0.75$ показало, что для случая $k=2/3$ наблюдается ФП второго рода, а при $2/3 < k \leq 0.75$ в системе реализуется ФП первого рода.

Для анализа характера ФП нами также был использован гистограммный анализ данных метода МК.

На рисунке 19 представлена гистограмма распределения энергии для случая $k=0.7$ с линейными размерами $L=48$. Графики построены при критической температуре ($T_N=0.7643$). Наличие двойного максимума в зависимости вероятности P от энергии U свидетельствует в пользу ФП первого рода. Такое же поведение наблюдается и для значения $k=0.75$.

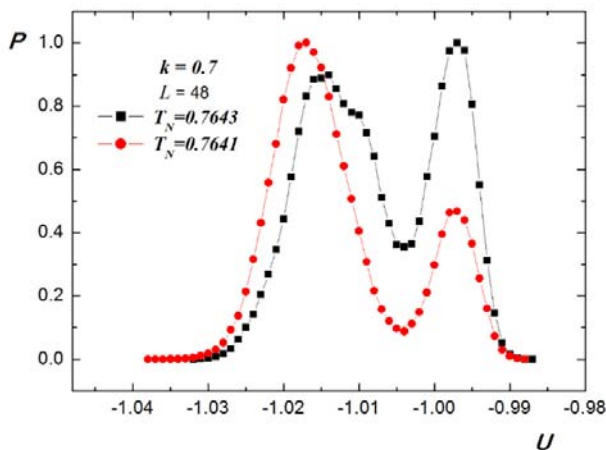


Рис. 19. Гистограмма распределения энергии для случая $k=0.7$.

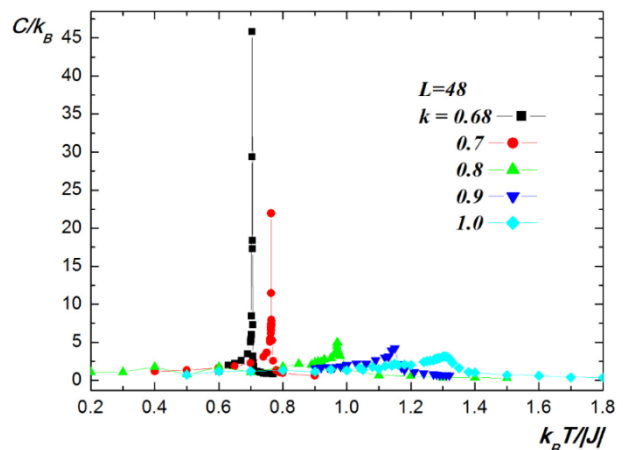


Рис. 20. Зависимость теплоемкости C/k_B от температуры $k_B T/J$ для разных значений k .

На рисунке 20 мы наблюдаем, что кривая температурной зависимости теплоемкости для $k=0.68$ и $k=0.7$ характеризуются ярко выраженными спадом значения теплоемкости в области температур $T \geq T_N$.

Таким образом, анализируя наши данные, можно утверждать, что нами впервые на фазовой диаграмме обнаружена область $2/3 < k \leq 0.75$, где переход из антиферромагнитной фазы в парамагнитную является переходом первого рода. Показано, что при значении $k=2/3$ наблюдается ФП второго рода, и конкуренция обменных взаимодействий не приводит к возникновению фрустрации и сильному вырождению основного состояния.

Для расчета магнитных критических индексов теплоемкости α , намагниченности β , восприимчивости γ и индекса радиуса корреляции ν использовались соотношения КРС (5 – 9).

Таблица 3.

Значения критических индексов для трехмерной антиферромагнитной модели Гейзенберга с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей на объемно-центрированной кубической решетке.

k	T_N	α	β	γ	ν	η	$\alpha+2\beta+\gamma=2$
0.0	2.152	-0.13(1)	0.37(1)	1.39(1)	0.70(2)	0.02(2)	2.0
0.1	1.873	-0.12	0.36	1.38	0.70	0.03	1.98
0.2	1.687	-0.13	0.37	1.39	0.70	0.02	2.0
0.3	1.494	-0.12	0.36	1.39	0.70	0.02	1.99
0.4	1.301	-0.12	0.36	1.38	0.70	0.03	1.98
0.5	1.904	-0.12	0.37	1.39	0.70	0.02	2.01
0.6	0.871	-0.13	0.37	1.38	0.71	0.03	1.99
Нефрустри- рованная модель Гейзенберга	—	-0.133(1)	0.368(3)	1.396(9)	0.711(5)	0.037(5)	—

Из данных, представленных в таблице 3, следует, что трехмерная антиферромагнитная модель Гейзенберга с учетом взаимодействия первых и вторых ближайших соседей в интервале значений $0.0 \leq k \leq 0.6$ не меняет характер критического поведения. В этом интервале значений k система проявляет универсальное критическое поведение.

Отметим, что полученные нами значения критических индексов в данном интервале в пределах погрешности совпадают с соответствующими значениями критических индексов для нефрустрированной модели Гейзенберга. Это свидетельствует о принадлежности исследуемой нами модели к тому же классу универсальности критического поведения, что и трехмерная модель Гейзенберга на кубической решетке.

В заключении представлены обобщающие выводы по результатам диссертационной работы.

Основные результаты работы:

1. Изучены особенности фазовых переходов фрустрированной модели Изинга на квадратной решетке с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от величины взаимодействия вторых ближайших соседей k . Показано, что для всех значений k в интервале $0.0 \leq k \leq 1.0$ наблюдается ФП второго рода, кроме интервала $0.5 < k < 0.67$, где реализуется ФП первого рода. При $k=0.5$ система переходит в частично фрустрированное состояние.
2. Проведено исследование критических свойств фрустрированной модели Изинга на квадратной решетке с взаимодействиями первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей. Рассчитаны статические магнитные критические индексы теплоемкости α , намагниченности β , восприимчивости γ , индекс радиуса корреляции ν и индекс Фишера η . Показано, что в исследуемой модели существуют две области, которые характеризуются различным набором критических индексов. Обнаружено, что класс универсальности критического поведения этой модели не меняется в пределах значения обменного взаимодействия $0.0 \leq k < 0.5$, а в интервале $0.7 \leq k \leq 1.0$ наблюдается неуниверсальное критическое поведение.
3. Проведено исследование критических и термодинамических свойств $3d$ антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке с взаимодействиями первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей. Получены температурные зависимости основных термодинамических функций для этой модели. Рассчитаны статические магнитные критические индексы теплоемкости α , восприимчивости γ , параметра порядка β , радиуса корреляции ν и индекс Фишера η . Установлено, что класс универсальности критического поведения этой модели не меняется в пределах значений $0.0 \leq k \leq 0.6$. В интервале $0.8 \leq k \leq 1.0$ наблюдается неуниверсальное критическое поведение.
4. Проведены исследования $3d$ антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК решетке с учетом взаимодействия первых J_1 и вторых J_2 ближайших соседей. Рассчитаны все основные магнитные критические индексы. Обнаружено, что в интервале $0.0 < k \leq 0.6$ система проявляет универсальное критическое поведение.
5. Построены фазовые диаграммы зависимости критической температуры T_N от величины взаимодействия вторых ближайших соседей k для моделей Изинга и Гейзенберга. Диаграммы обеих моделей качественно совпадают друг с другом. Показано, что для всех значений k в интервалах $0.0 \leq k \leq 2/3$ и $0.75 < k \leq 1.0$ наблюдается ФП второго рода. На диаграмме обнаружена область $2/3 < k \leq 0.75$, где переход из антиферромагнитной фазы в парамагнитную является переходом первого рода. Показано, что при значении $k=2/3$ наблюдается ФП второго рода, и конкуренция обменных взаимодействий не приводит к возникновению полностью фрустрированного состояния.
6. Разработан комплекс программ для ЭВМ, с помощью которого можно исследовать природу ФП и статические критические свойства фрустрированных спиновых моделей.

7. Подтверждена эффективность применения репличного алгоритма и алгоритма Ванга-Ландау метода МК для исследования систем с конкурирующими взаимодействиями.

Цитированная литература.

1. Камилов И.К., Муртазаев А.К., Алиев Х.К. Исследование фазовых переходов и критических явлений методами Монте-Карло // УФН. – 1999. – 169, №7. – С. 773–795.
2. Landau D.P. Computer simulation studies of critical phenomena // Physica A. – 1994. – Vol. 205. – P. 41–64.
3. Binder K., Luijten E. Monte Carlo tests of renormalization-group predictions for critical phenomena in Ising models // Phys. Reports. – 2001. – Vol.344. – P.179-253.
4. Mitsutake A., Sugita Y., Okamoto Y. Generalized-Ensemble Algorithms for Molecular Simulations of Biopolymers // preprint cond-mat/0012021.
5. Wang F., Landau D.P. Determining the density of states for classical statistical models: A random walk algorithm to produce a flat histogram // Physical Review E. – 2001. – Vol. 64. – P. 056101.
6. Binder K., Wang J.Sh. Finite-size effects at critical points with anisotropic correlations: phenomenological scaling theory and Monte Carlo simulations // Journal of Statistical Physics. – 1989. – Vol. 55. – P. 87-127.
7. Binder K., Luijten E. Monte Carlo tests of renormalization-group predictions for critical phenomena in Ising models // Phys. Reports. – 2001. – Vol. 344. – P. 179-253.
8. Биндер К. Методы Монте-Карло в статистической физике / Пер. с англ. В.Н. Новикова, К.К. Сабельфельда; Под. ред. Г.И. Марчука, Г.А. Михайлова. – М.: Мир, 1982. – 400 с.
9. Mailhot A., Plumer M.L., Caille A. Finite-size scaling of the frustrated model on a hexagonal lattice // Physical Review B. – 1994-II. – V.50, no.10. – P. 6854-6858.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Работы, опубликованные в перечне периодических научных изданий, рекомендованных ВАК РФ:

1. Муртазаев, А.К. Магнитные и термодинамические свойства малых магнитных частиц с фрустрациями / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова**, Я.К. Абуев // Вестник ДНЦ РАН. – 2013. – № 51. – С. 18-22.
2. Муртазаев, А.К. Модулированные структуры в магнитных наночастицах / А.К. Муртазаев, Ж.Г. Ибаев, Я.К. Абуев, Р.А. Муртазалиев, **Д.Р. Курбанова**, Т.А. Тааев, Н.А. Магомедов // Вестник ДНЦ РАН. – 2013. – № 50. – С. 9-12.
3. Муртазаев, А.К. Влияние замороженных немагнитных примесей на фазовые переходы и критические явления в магнитных наноструктурах, описываемых трехмерной моделью Поттса / А.К. Муртазаев, А.Б. Бабаев, Г.Я. Атаева, М.А. Магомедов, Р.А. Муртазалиев, **Д.Р. Курбанова**, А.А. Муртазаева // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 1. – С. 10-12.

4. Магомедов, М.А. Численное моделирование процессов распространения лазерного излучения в цилиндрическом плазменном волноводе методами вычислительной физики / М.А. Магомедов, А.А. Муртазаева, Г.Ш. Шихсинов, Р.А. Муртазалиев, **Д.Р. Курбанова**, Н.А. Магомедов // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 6. – С. 15-20.
5. Муртазаев, А.К. Фазовые переходы в антиферромагнитной модели Изинга на объемно-центрированной кубической решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Ф.А. Кассан-Оглы, **Д.Р. Курбанова** // ЖЭТФ. – 2015. – Т. 147, вып. 1. – С. 127-131.
6. Муртазаев, А.К. Критические свойства антиферромагнитной модели Изинга на квадратной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова** // Известия РАН. Серия физическая. – 2015. – Т. 79, № 11. – С. 1572-1575.
7. Муртазаев, А.К. Исследование критических свойств модели Изинга на объемно-центрированной кубической решетке с учетом взаимодействия следующих ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Я.К. Абуев, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова** // ФТТ. – 2017. – Т. 59, вып. 6. – С. 1082-1088.
8. Муртазаев, А.К. Фазовые переходы в антиферромагнитной модели Изинга на слоистой треугольной решетке / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Я.К. Абуев, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова**, К.Ш. Муртазаев // Инженерная физика. – 2017. – Т. 8. – С. 78-83.
9. Муртазаев, А.К. Фазовые переходы в антиферромагнитной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке с учетом взаимодействий следующих ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, **Д.Р. Курбанова**, М.К. Бадиев // ФТТ. – 2018. – Т. 60, вып. 6. – С. 1162-1165.

Публикации в других изданиях:

10. Муртазаев, А.К. Фазовые переходы в модели Изинга на квадратной решетке с взаимодействиями следующих ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова** // Сборник трудов 16-го международного симпозиума «Упорядочение в минералах и сплавах» ОМА-16. – Ростов-на-Дону, Туапсе. – 2013. – С. 28-30.
11. Murtazaev, A.K. Ising antiferromagnet with nearest neighbor and next-nearest neighbor interactions on a square lattice / A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, M.K. Badiiev, **D.R. Kurbanova** // V Euro-Asian Symposium "Trends in MAGnetism": Nanomagnetism (EASTMAG-2013). – Vladivostok. – 2013. – С. 133.
12. Murtazaev, A.K. Ising antiferromagnet with nearest neighbor and next-nearest neighbor interactions on a square lattice / A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, M.K. Badiiev, **D.R. Kurbanova** // Book of Abstracts MISM. – Moscow. – 2014. – P. 753.

13. Murtazaev, A.K. Phase transitions in frustrated Ising antiferromagnet on a body-centered cubic lattice with next-nearest neighbor interactions / A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, D.R. Kurbanova // Book of Abstracts MISM. – Moscow. – 2014. – P. 758.
14. Муртазаев, А.К. Фазовые переходы в антиферромагнитной модели Изинга на объемно-центрированной кубической решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Ф.А. Кассан-Оглы, **Д.Р. Курбанова** // Сборник трудов 17-го международного симпозиума «Упорядочение в минералах и сплавах» ОМА-17. – Ростов-на-Дону, пос. Южный. – 2014. – С. 207-211.
15. Муртазаев, А.К. Критические свойства антиферромагнитной модели Изинга на квадратной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова** // Труды международного междисциплинарного симпозиума «Физика поверхностных явлений, межфазных границ и фазовые переходы». – Нальчик, Ростов-на-Дону, Грозный, пос. Южный. – 2014. – С. 15-19.
16. Муртазаев, А.К. Критические свойства антиферромагнитной модели Изинга с учетом взаимодействий ближайших и следующих ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова** // Материалы VIII Всероссийской конференции «ФЭ-2014». – Махачкала. – 2014. – С. 207-211.
17. Муртазаев, А.К. Критические свойства фрустрированной антиферромагнитной модели Изинга на квадратной решетке / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова** // Тезисы докладов II Всероссийской конференции «Нелинейные и резонансные явления в конденсированных средах». – Уфа. – 2014. – С. 30.
18. Муртазаев, А.К. Критические свойства фрустрированной антиферромагнитной модели Изинга с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова** // Тезисы докладов II Всероссийской научной молодежной конференции «Актуальные проблемы нано- и микроэлектроники». – Уфа. – 2014. – С. 173.
19. Муртазаев, А.К. Магнитные и термодинамические свойства малых магнитных частиц с фрустрациями / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова** // Тезисы докладов II Всероссийской научной молодежной конференции «Актуальные проблемы нано- и микроэлектроники». – Уфа. – 2014. – С. 175.
20. Бадиев, М.К. Критические свойства фрустрированной антиферромагнитной модели Изинга на квадратной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей / М.К. Бадиев, А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, **Д.Р. Курбанова** // Тезисы докладов II Всероссийской научной молодежной конференции «Актуальные проблемы нано- и микроэлектроники». – Уфа. – 2014. – С. 173.

21. Murtazaev, A.K. Phase transitions in frustrated Ising antiferromagnet on a body-centered cubic lattice with next-nearest neighbor interactions / A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, **D.R. Kurbanova** // Solid State Phenomena. – 2015. – Vol. 233-234. – P. 86-89.
22. Муртазаев, А.К. Фазовые переходы в антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Ф.А. Кассан-Оглы, **Д.Р. Курбанова** // Труды международного междисциплинарного симпозиума «Физика поверхностных явлений, межфазных границ и фазовые переходы» PSP&PT - 5. – Нальчик, Ростов-на-Дону, Грозный, пос. Южный. – 2015. – С. 168-170.
23. **Курбанова, Д.Р.** Исследование фазовых переходов в модели Изинга на ОЦК решетке методом Монте-Карло / **Д.Р. Курбанова**, А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Ф.А. Кассан-Оглы // Сборник трудов XI Международного семинара «Магнитные фазовые переходы», посвященного 80-летию член-корреспондента РАН Камилова И.К. – Махачкала. – 2015. – С. 140.
24. **Курбанова, Д.Р.** Фазовые переходы в антиферромагнитной модели Изинга на ОЦК решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей / **Д.Р. Курбанова**, А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Ф.А. Кассан-Оглы // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 80-летию члена-корреспондента РАН И.К. Камилова «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». – Махачкала. – 2015. – С. 100.
25. **Курбанова, Д.Р.** Фазовые переходы в модели Изинга на ОЦК решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей / **Д.Р. Курбанова**, А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов // Материалы II Всероссийской конференции «Современные проблемы физики плазмы и физической электроники». – Махачкала. – 2015. – С. 198-199.
26. Муртазаев, А.К. Модель Изинга на треугольной решетке с взаимодействиями следующих ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Я.К. Абуев, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова** // Вестник ДГУ. – 2016. – Т. 31, вып. 4. – С. 64-70.
27. Муртазаев, А.К. Критические свойства фрустрированной антиферромагнитной модели Изинга на объемо-центрированной кубической решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, **Д.Р. Курбанова**, М.К. Бадиев, Я.К. Абуев // Труды международного междисциплинарного симпозиума «Физика поверхностных явлений, межфазных границ и фазовые переходы». – Нальчик, Ростов-на-Дону, пос. Южный. – 2016. – С. 89-92.
28. Муртазаев, А.К. Фазовые переходы и критические свойства в антиферромагнитной модели Изинга на треугольной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, **Д.Р. Курбанова**, М.К. Бадиев, Я.К. Абуев // Труды международного междисциплинарного симпозиума «Физика

поверхностных явлений, межфазных границ и фазовые переходы». – Нальчик, Ростов-на-Дону, пос. Южный. – 2016. – С. 93-96.

29. Муртазаев, А.К. Фазовые переходы и критические свойства фрустрированной модели Изинга с учетом взаимодействий следующих ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова** // Выездная сессия Научного совета РАН по физике конденсированных сред. Тезисы докладов IX Научно-практического семинара «Актуальные проблемы физики конденсированных сред». – Севастополь. – 2016. – С. 6-7.
30. Murtazaev, A.K. Ising antiferromagnetic with nearest neighbor and next-nearest neighbor interactions on a triangular lattice / A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, M.K. Badiev, **D.R. Kurbanova** // Abstracts book VI Euro-Asian Symposium “Trends in MAGnetism” (EASTMAG-2016). – Krasnoyarsk. – 2016. – P. 109-110.
31. **Курбанова, Д.Р.** Фазовые переходы в фрустрированной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке / **Д.Р. Курбанова**, А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, М.К. Бадиев, К.Ш. Муртазаев // Сборник трудов международной конференции «Фазовые переходы, критические и нелинейные явления в конденсированных средах». – Махачкала. – 2017. – С. 61-63.
32. Муртазаев, А.К. Фазовые переходы в антиферромагнитной модели Изинга на треугольной решетке с учетом взаимодействий вторых ближайших соседей / А.К. Муртазаев, М.К. Рамазанов, Я.К. Абуев, М.К. Бадиев, **Д.Р. Курбанова**, К.Ш. Муртазаев // Выездная сессия Научного совета РАН по физике конденсированных сред. Сборник трудов X Научно-практического семинара «Актуальные проблемы физики конденсированных сред», посвященного 110-летию Х.И. Амирханова. – Махачкала. – 2017. – С. 119-122.
33. Murtazaev, A.K. Critical phenomena Ising antiferromagnetic with nearest neighbor and next-nearest neighbor interactions on a triangular lattice / A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, M.K. Badiev, **D.R. Kurbanova** // Book of Abstracts MISM. – Moscow. – 2017. – P. 306.
34. Murtazaev, A.K. Critical phenomena in the antiferromagnetic Ising model on a body-centered cubic lattice with next-nearest neighbor interactions / A.K. Murtazaev, M.K. Ramazanov, **D.R. Kurbanova**, M.K. Badiev, K.Sh. Murtazaev // Book of Abstracts MISM. – Moscow. – 2017. – P. 1014.